Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Percorsi didattici per l'insegnamento della geometria a studenti con disabilità visiva

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

di

Sara Covello

Relatore: Prof. Andrea Bruno

Anno Accademico 2009-2010

Ottobre 2010

Introduzione

Accade a volte, nella maturazione di un individuo, di trovarsi a dover abbandonare la strada maestra per intraprendere sentieri inusitati, senza che si possa in alcun modo ritornare sui propri passi, non fino a quando si comprenda la ragione di ciò che contrariamente ad ogni logica ti ha portato là dove non è conveniente, dove è scomodo, dove non ha nessun senso restare.

Questo lavoro è il frutto di un'esperienza, l'epilogo di un incontro perfetto con il mondo della disabilità. Disabilità con la A maiuscola, quella senza correttivi, quella che non si può adattare a nessun tipo di esistenza se non quella aperta dalla possibilità di crearne una a parte. Chi accede a questo mondo a parte, comprende che se avrà la forza di permanervi conoscerà la propria possibilità di misurarsi con il limite, che solo in parte è quello dettato dalla menomazione, ma certamente più estesamente è il proprio limite. E di scoprire in diretta successione, invece, la propria straordinaria possibilità di espressione, di creare, di dare senso, un proprio senso, alle cose della vita.

Per qualche fortunata casualità mi trovai a fare una breve esperienza di volontariato in un Centro Residenziale per persone Disabili gravi e gravissime, nel cuore del Mugello. Fu l'inizio di un percorso di lavoro e di servizio lungo sette anni, di totale immersione in questo universo parallelo dove gestualità, linguaggio e comunicazione globale necessita di abbandono assoluto, nel senso di lasciare i propri riferimenti per adottarne di diversi, ma anche nel senso di spogliarsi delle proprie abitudini e acquisizioni, del proprio sapere, per farsi pervadere dall'eccellenza della vita semplice, rituale ed essenziale, dal senso di uno sguardo senza parola, dalla dedizione incondizionata e instancabile, dalla magia dei gesti che pretendono ascolto.

In questi anni di lavoro, durante i quali ho continuato a dedicarmi alla matematica, mi sono domandata quale intersezione, quale denominatore comune potesse esserci fra la dimensione logica degli studi, e la pratica della dimensione del linguaggio non verbale. Ancor oggi non so ancora quale dimensione abbia supportato l'altra, non so ancora se lo studio della matematica mi abbia fornito l'equilibrio per poter navigare nella relazione con queste persone, o viceversa l'emotività costantemente sollecitata dalla relazione con loro mi abbia aiutato a portare in fondo i miei studi.

Sta di fatto che ne è scaturiata una tesi sul concetto di visuale comune ai due mondi, in particolare sull'insegnamento della geometria (disciplina matematica considerata generalmente visiva) ad alunni non vedenti. Essa è certamente una delle materie più difficili da insegnare ad un non vedente, ma nello stesso tempo una delle più utili perché necessaria per la costruzione della propria rappresentazione mentale dello spazio in cui ognuno si muove e, pertanto, indispensabile per la vita quotidiana di ciascuno.

Ho affrontato, dunque, un lavoro di ricerca di testi e video presso i centri di consulenza tiflodidattica di Firenze e di Roma, frequentato attività organizzzate dall' istituto dei ciechi di Milano e preso visione delle macchine matematiche per non vedenti presenti nel Laboratorio di Macchine Matematiche del Dipartimento di Matematica Pura e Applicata dell'Università degli studi di Modena e Reggio Emilia.

La tesi

La tesi si articola in nove capitoli.

Il lavoro si apre con il problema di Molyneux, primo celebre tentativo di comprendere l'esperienza spaziale dei ciechi.

Risalente al secolo diciasettesimo, esso si incentra sulla singolare eventualità del recupero tardivo del senso della vista da parte di un cieco nato e della sua capacità o meno di distinguere con gli occhi, un cubo da una sfera, avendo imparato in precedenza a riconoscerli con il solo tatto. Posto da Moyineux nel 1688 come quesito al suo amico Locke, tale interrogativo, fu, tra il settecento e ottocento, al centro di un importante dibattito filosofico, aperto tutt' oggi, che fece discutere i più importanti pensatori, da Berkeley a Leibniz, da Cartesio a Voltaire fino ad arrivare a Condillac e Diderot, rappresentando un vero e proprio banco di prova della disputa fra empirismo e razionalismo.

Nella sua semplice formulazione, infatti, Molyneux aveva in qualche modo circoscritto il problema seicentesco dell'esistenza delle idee innate, trasferendolo dalla metafisica alla gnoseologia, dall'idea di Dio a quella di cubo; intrecciando diversi nodi concettuali, quali: le possibilità e i limiti della conoscenza umana, il rapporto tra le sensazioni, le immagini e i concetti, e la disputa sulla maggiore o minore oggettività della vista sul tatto.

Fu proprio nell'ambito di questo dibattito che venne portato da Diderot, sul banco di prova a favore della sua tesi innatista, l'esempio del matematico cieco Saunderson, professore lucasiano di matematica all'università di Cambrige, dotato di una straordinaria capacità di rappresentarsi mentalmente figure geometriche e numeri.

In realtà la storia della matematica comprende un gran numero di matematici non vedenti. Uno dei più grandi matematici di sempre , Eulero, è stato cieco per gli ultimi diciasette anni della sua vita e fu proprio dopo la sua cecità che produsse più della metà delle sue opere.

Proprio avendo come sfondo le figure di questi matematici, è possibile porsi alcune domande:

- quale matematica e in particolare quale geometria è possibile insegnare ai ciechi?
- la cecità pone dei limiti di apprendimento della matematica e della geomatria?
- è necessaria e opportuna una riduzione degli obiettivi curriculari nazionali?
- occorre ad, esempio, tagliare tutti quegli aspetti legati (forse) alla vista?

Queste sono domande e tentazioni che tanti insegnati si pongono e vivono nel loro quotidiano quando in classe abbiano un ragazzo non vedente.

Per rispondere ad esse è necessario ripercorrere le tappe della formazione dei concetti logico-matematici di un qualsiasi bambino, non vedente.

Le ricerche di Jean Piaget e della sua scuola, attraverso migliaia di interviste-gioco con bambini delle più svariate età e dei più diversi ambienti sociali e culturali, hanno evidenziato come la maturazione di strutture del pensiero attinenti uno sviluppo logico e matematico passi attraverso tappe ben precise con età medie abbastanza puntuali per il raggiungimento di ciascuna di esse. Esistono, dunque, delle "esperienze" che un bambino dovrà aver vissuto per poter maturare le strutture del pensiero matematico, e delle capacità "pre-matematiche" che dovrà acquisire per avere un corretto rapporto con questa disciplina.

Gli obiettivi di carattere generale che ci si deve porre prima di definire l'attività logico-matematica sono i seguenti:

- capacità di osservare
- capacità di classificare
- capacità di stabilire relazioni
- capacità di simbolizzare
- capacità di lateralizzare
- capacità di compiere operazioni spazio-temporali
- capacità di compiere operazioni logiche
- capacità di eseguire operazioni aritmetiche
- acquisizione del concetto di spazio

Riprendendo Piaget sono tre i fattori che intervengono in questo processo di strutturazione del pensiero:

- maturativo: lo sviluppo delle strutture neuronali.
- esperienzale: il bambino deve aver fatto esperienza dell'ambiente fisico che lo circonda.
- sociale: la presenza di persone che trasmettono al bambino determinate conoscenze.

È forse superfluo sottolineare che stiamo parlando di un qualsiasi bambino e non di un bambino cieco (anche se si può intuire che ciò che è utile o importante per un bambino che vede, diventa fondamentale per un bambino cieco).

L'insegnamento della matematica a un non vedente non è del tutto differente da quello rivolto ad un vedente, ma presuppone la conoscenza delle modalità di formazione dei concetti e di esplorazione del mondo tipiche dei non vedenti. I ciechi, infatti, necessitano di tempi più lunghi nell'accostarsi alla realtà, in quanto tale è l'esplorazione tattile degli oggetti.

Un'attenzione particolare merita l'acquisizione del concetto di spazio. Esso si basa su rapporti topologici e dunque sulle posizioni di reciprocità tra gli oggetti dello spazio e tra oggetto e osservatore (dentro-fuori, sopra-sotto, continuo-discontinuo, aperto-chiuso...). Dal concetto di spazio deriva la capacità di orientamento, che , utile per chiunque, è evidentemente fondamentale per un cieco sia per la sua vita pratica (orientamento statico e dinamico negli ambienti di vita quotidiana e mobilità nella città), sia nella vita culturale: senza orientamento non è possibile né scrivere, né leggere il Braille.

A tal proposito ho riportato l'esperienza condotta nel 2000 da Giovanna Virga con un campione di 25 non vedenti, di età compresa tra i 20 e 45 anni, alcuni dei quali avevano perso la vista in età precoce, mentre altri in età adulta, a cui venne chiesto di individuare le principali strategie usate nella rappresentazione mentali di ambienti nuovi e non conosciuti.

Dunque la geometria è una disciplina fondamentale per un bambino non vedente perchè gli permette di rappresentarsi mentalmente luoghi e ambienti.

Le immagini mentali della realtà dipendono notevolmente da quelle geometriche, in quanto ogni elemento può essere ricondotto a grandi linee a figure conosciute.

La corretta acquisizione del linguaggio geometrico, la corretta corrispondenza tra termini geometrici ed elementi reali, consente, ad esempio, di trasmettere ad un cieco ciò che è veramente fuori della portata della sua esperienza: la facciata di un palazzo monumentale o di una chiesa o gli elementi di un monumento che non potrà mai arrivare a toccare.

Per conoscere le forme geometriche, il bambino cieco mette in atto tutte le dinamiche di esplorazione aptica, fino ad essere in grado di rappresentare la forma di riferimento. L'alunno deve essere dunque invitato a rappresentare oggetti e percorsi soltanto dopo averli manipolati.

Il primo approccio con le forme geometriche il bambino lo fa già nella scuola materna con la palla, il cubo e il cilindro; attraverso la manipolazione di queste tre figure - base egli scopre che può sovrapporre i cubi e non le palle, che la palla si muove al più leggero tocco ed il cubo no, si accorge che il cilindro ha le proprietà della palla, se messo orizzontalmente e le proprietà del cubo, se messo verticalmente.

Nella scuola elementare il bambino passa dalla conoscenza della forma tridimensionale a quella bidimensionale attraverso ausili didattici quali ad esempio le figure geometriche ad incastro. Le prime forme da distinguere e da incastrare possono essere il cerchio e il quadrato, così diverse tra loro; successivamente il quadrato e il rettangolo che richiedono un'analisi più accurata e una misurazione dei lati.

Questa conoscenza della forma geometrica viene comunemente chiamata "immagine-guida" perché è una guida al bambino non vedente quando si troverà ad osservare un oggetto grande richiedendone il suo spostamento; davanti ad un mobile, ad esempio, il sapere che è quadrato o rettangolo gli facilita l'esplorazione, perché dopo aver misurato un lato (nel caso del quadrato) o due lati (nel caso del rettangolo) ne riesce a riconoscere l'ampiezza.

Ogni forma geometrica tridimensionale ne richiama una bidimensionale e viceversa; il cubo fa pensare al quadrato, la palla al cerchio. Se con un cordoncino appuntato con gli spilli su un piano di gomma egli contorna la base di un cubo, gli risulta un quadrato; se schiaccia una sfera di creta ne risulta un cerchio. Il passaggio dalla tridimensionalità alla bidimensionalità gli servirà poi per disegnare qualsiasi oggetto e per illustrare qualsiasi avvenimento. Dalla scoperta della forma geometrica nelle cose si passa alla scoperta del proprio corpo: le braccia, le gambe, le dita della mano possono essere parallele e divergenti, il braccio con il corpo può formare tutti gli angoli, appoggiando i gomiti sul tavolo si puó costruire un triangolo, con le due mani si possono fare tante forme geometriche iniziando dal cerchio. È un gioco, una scoperta, una verifica.

Secondo alcuni studi effettuati dal G.R.I.M (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche), la geometria nei non vedenti ha alcune caratteristiche importanti:

- è dinamica nello spazio con un continuo accomodamento delle immagini mentali riferite allo spazio circostante attraverso l'uso degli altri sensi;
- la geometria del piano risulta priva di significato se non si formano le immagini mentali attraverso gli strumenti di rappresentazione delle figure piane in rilievo;
- la ricostruzione della geometria di un ambiente non conosciuto può avvenire attraverso delle indicazioni nella loro lingua naturale;
- possono essere svolti problemi di rappresentazione della geometria piana con figure geometriche rappresentate su cartoncino in rilievo.

In base a questi risultati e considerando gli obiettivi nazionali, è importante sottolineare che è vero che i minorati visivi seguono la programmazione scolastica, ma è altresì vero che, che ogni bambino cieco ha una storia a parte e uno sviluppo proprio.

Nell'insegnamento della geometria a ragazzi ciechi uno dei principali temi che deve essere affrontato è sicuramente quello dell'acquisizione delle figure geometriche e del sistema metrico.

L'apprendimento delle figure geometriche si svolge attraverso tappe e metodologie che possiamo così riassumere:

1. *Acquisizione della motricità fine per la coordinazione pensiero- mano*: ciò dovrebbe essere già appreso all'ingresso della scuola primaria o quantomeno durante i primi due anni di questo ciclo potranno essere eseguiti esercizi di consolidamento;

2. *Riconoscimento forme attraverso l'uso del casellario Romagnoli*, in cui sono presenti parallelepipedi, cilindri e piramidi che possono essere collocati dove il bambino meglio crede e attraverso l'esplorazione tattile si possono eseguire dei disegni e possono essere confrontate le forme dei solidi.

3. *Riconoscimento delle forme attraverso l'uso di solidi in sequenza*: quando si propone l'esplorazione di un solido che dovrebbe servire per l'acquisizione dei concetti chiave della geometria piana, è bene proporre la stessa figura con dimensioni diverse (minimo tre: una più piccola, una media, una grande), altrimenti il bambino cieco può capire che ad esempio il triangolo ha sempre quella dimensione; successivamente possono essere proposte altre figure facendo notare il numero dei lati e lo spessore diverso.

4. *Riconoscimento della misura dei lati e degli angoli*: i lati possono essere misurati con righelli, squadre e metri che hanno le tacchette dei centimetri e dei millimetri in rilievo, cosicché il bambino può capire quanto misura quel lato. Per quanto riguarda gli angoli esistono varie tipologie di goniometri che permettono di far scorrere un'asta mobile centrale in modo da far notare la differenza tra i vari tipi di angoli, ma non la misura.

5. *Riconoscimento del perimetro*: per spiegare il perimetro di un poligono l'importante è partire dalla realtà. Sarebbe opportuno, ad esempio, far camminare lo studente attorno all'edificio scolastico o al bordo "perimetrale" del cortile della scuola, oppure lungo il vialetto che la circonda, facendogli contare il numero dei passi; ciò potrebbe far capire al bambino che quello che abbiamo fatto è trovare il perimetro. Successivamente si può consegnare all'alunno alcuni disegni in rilievo o con una cordicella, potremmo riprodurre il perimetro del quadrato e tagliare la cordicella in modo che vi corrisponda perfettamente: a questo punto, la lunghezza della cordicella sarebbe equivalente al

perimetro del quadrato. Di conseguenza possono essere analizzati i perimetri di una serie di disegni dai contorni in rilievo, rappresentanti un rettangolo, un triangolo, una figura trapezoidale, un pentagono ecc. e segnare accuratamente in Braille le dimensioni di ogni lato, utilizzando il sistema metrico decimale o il sistema da noi più comune. Dopo aver calcolato il perimetro di molte diverse figure, lo studente potrà scoprire la formula relativa al perimetro (o circonferenza) di un cerchio. Infatti, uno strumento fondamentale è il cordoncino Romagnoli (e un elastico) che può essere anche fissato intorno a chiodini su una superficie per poter riprodurre le diverse figure geometriche.

6. *Riconoscimento delle aree*: per spiegare il concetto di area e conseguentemente di centimetri cubici non esiste una regola e non sempre è possibile che l'alunno comprenda veramente questo concetto; si può, però, provare ad utilizzare sempre la pratica quotidiana. Infatti, considerando il pavimento di un'aula: se è costituito da piastrelle quadrate della misura di un piede possiamo determinare quante di queste piastrelle quadrate sono necessarie per rivestire la superficie del pavimento dell'aula. Successivamente si spiegherà che esiste un sistema molto più facile per determinare questa superficie. Dopo di che, si può passare a diversi strumenti di manipolazione. Alcune forme realizzate su carta con contorni a rilievo possono essere tagliate a pezzi e nuovamente assemblate per creare forme diverse aventi la stessa area. Le tavole in gomma con i grafici possono essere suddivise con fasce di gomma, in modo da creare forme diverse, e i quadrati della griglia così realizzata possono essere contati per determinarne l'area. Le mattonelle in legno possono essere assemblate in modo da creare forme diverse e determinarne l'area. A questo punto, questa conoscenza può essere trasferita ai disegni dai contorni in rilievo che illustrano il concetto di area: lo studente dovrebbe proseguire calcolando l'area di un quadrato, di un rettangolo, di un parallelogrammo, di un triangolo,

e infine di forme più complesse; infine, lo studente può studiare questa formula e utilizzarla per calcolare l'area di un cerchio.

7. *Verifica dei concetti chiave*: per poter verificare se l'alunno non vedente ha appreso i concetti chiave si può utilizzare il piano di gomma o quello di feltro con il tiralinee e chiedere di disegnare una figura, di spiegare toccando nel proprio disegno il perimetro e l'area.

È dunque opportuno soffermarsi sul ruolo svolto dai sussidi didattici, strumenti con i quali il ragazzo cieco può sostituire ciò che è visivo, che è inanzitutto il tratto grafico della penna o del gesso. Dovremmo dunque necessariamente parlare di piano in gomma, piano in feltro, geopiano e di tutti gli strumenti necessari al disegno geometrico, righe, squadre, goniometri, compassi. Tutto questo, e quant'altro sia prodotto, rende il cieco autonomo nella sua comunicazione grafica con se stesso, con l'insegnante e i compagni.

Oltre ai sussidi in commercio, ogni insegnante deve attingere alla propria inventiva e fantasia, utilizzando strumenti poveri con cui si puo fare matematica.

Con del cartoncino e della sabbia o della farina molto fine si può far scoprire il legame tra il volume dei solidi: si costruiscono due contenitori uno a forma di prisma e uno di piramide con stessa base e senza altezza, ambedue senza "coperchio" e si riempie la piramide di sabbia, vuotandola poi nel prisma. Gli studenti, vedenti o non vedenti che siano, dopo aver formulato ipotesi, scoprono che serviranno tre piramidi per riempire il prisma, e potranno poi formalizzarlo affermando che il volume di una piramide è un terzo di quello di un prisma di uguale base e altezza.

Per comprendere come la rotazione di una figura piana generi un solido, si possono utilizzare delle decorazioni, tipiche del Carnevale, che si aprono fino a diventare una palla o un oggetto tridimensionale.

Mentre le lamine di carta velina sono tutte sovrapposte, si possono ritagliare in modo da formare un triangolo. Aprendole, si genererà tra le mani degli studenti di un cono.

Gli stessi risultati possono essere ottenuti con la creta: dopo aver costruito un cilindro di creta e un triangolo rettangolo rigido con un cateto di base e l'altro uguale all'altezza, si ruota quest'ultimo in modo da scavare un cono all'interno del cilindro; si può inoltre constatare che la creta "uscita" è la terza parte di quella iniziale.

È evidente che la necessaria esplorazione (degli oggetti da manipolare, del disegno eseguito dall'insegnante o dall'alunno stesso, dello strumento da utilizzare per posizionarlo correttamente, ...) richieda tempi mediamente più lunghi rispetto a quelli dei compagni.

Di questi maggiori tempi bisogna tener conto, ma non abbassare il livello delle richieste e delle conoscenze da trasmettere, quanto piuttosto nel dosare le esercitazioni affidate o riservare tempi più lunghi per eseguire lo stesso compito richiesto ai compagni. E i compagni sapranno che non ci sono in queste scelte né facilitazioni né preferenze, perché dovrà essere insegnato loro (prima della matematica) ciò che la scuola di Barbiana ha insegnato a noi e cioè che " la giustizia non è fare parti uguali tra disuguali".

Proprio a sussidi didattici in legno, da me personalmente costruiti, mi sono affidata per affrontare il teorema di Pitagora spiegato ad alunni non vedenti e proporne due dimostrazioni tattili ed è ancora ad un ausilio didattico, il "teatrino" di Piochi - Baldeschi, che ho fatto riferimento nell'intenzione di spiegare ad alunni non vedenti il concetto di prospettiva.

Per quanto riguarda la spiegazione delle isometrie ad alunni non vedenti, ho fatto riferimento ad alcune interessanti schede, presentate da Del Campo in *L' insegnamento della matematica ai ciechi.* Egli introduce una serie di esercizi realizzabili sul piano in gomma, preferibilmente con fogli di carta normale, piuttosto che la carta/plastica speciale da disegno, che risulta troppo liscia e scivolosa.

Si tratta di utilizzare due fogli sovrapposti per disegnare la stessa figura in entrambi e successivamente di tenerne bloccato uno tramite alcuni fermagli o cavalieri mentre si muove l'altro. Osservando poi le due figure gli alunni potranno scoprire le caratteristiche delle varie trasformazioni.

La figura scelta da Del Campo è un cigno; dopo aver mostrato agli allievi dei modelli in gesso o in plastica dell'animale, egli suggerisce di disegnarlo in modo stilizzato come la cifra 2.

La tesi si conclude con la presentazione delle macchine matematiche e con la cronaca della collaborazione tra il Laboratorio di Macchine Matematiche del Dipartimento di Matematica Pura e Applicata dell'Università degli studi di Modena e Reggio Emilia da me visitato nel Giugno 2010 e l'istituto regionale per ciechi "G.Garibaldi" di Reggio Emilia che ha dato luogo all'allestimento della mostra "Geometria a tu per tu", visitata da alunni normodotati e non vedenti, in cui vengono esposte delle macchine geometriche e i rispettivi modelli adattati per non vedenti. Le schede di tali macchine sono di seguito riportate.

In conclusione si può affermare che lo studio della matematica e in particolare della geometria, da parte dei non vedenti può essere svolto in modo parallelo a quello dei compagni vedenti, assicurandosi che tutti abbiano la possibilità di accedere ai concetti purché supportati da un adeguato materiale didattico e rispettati nei loro tempi di apprendimento.

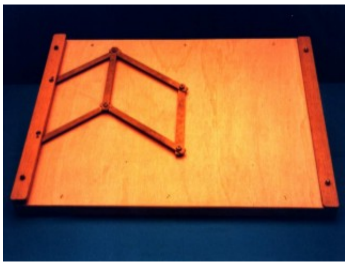
Far questo significa accettare l'altro e la sua alterità. Perciò ogni insegnante dovrebbe essere in grado di mettersi in gioco per costruire un percorso didattico che tenga conto delle ricchezze di tutti e che permetta a tutti di muoversi autonomamente verso il raggiungimento di conoscenze, competenze e abilità.

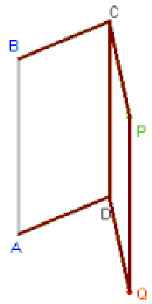
Schede delle macchine geometriche

Macchina per la realizzazione di una traslazione

Si definisce **traslazione** di A in A' (o di vettore $\overrightarrow{AA'}$) la trasformazione del piano che ad ogni suo punto P associa il punto P' tale che $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$ (vettori equipollenti). Il vettore $\overrightarrow{AA'}$ è detto vettore della traslazione, e ne individua grandezza (modulo), direzione e verso.

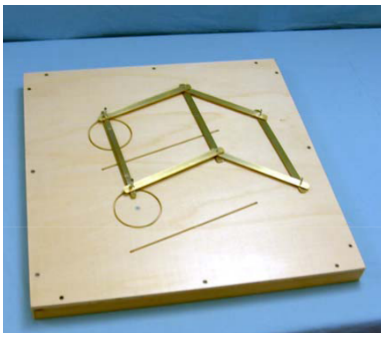
Modello originale





La macchina per la realizzazione di una traslazione, *traslatore di Kempe*, è formata da due parallelogrammi $ABCD$ e $DCPQ$ articolati, giacenti sul medesimo piano π e aventi un lato in comune, CD, e un altro, AB, parallelo ad esso e fissato al piano del modello. Gli estremi P e Q del terzo lato, parallelo ai precedenti, hanno due gradi di libertà e sono rispettivamente il punto direttore e il punto tracciatore: scegliendo un punto su π e portando su di esso il punto P, automaticamente il vertice Q il suo corrispondente individua il suo corrispondente nella traslazione

Modello adattato per non vedenti



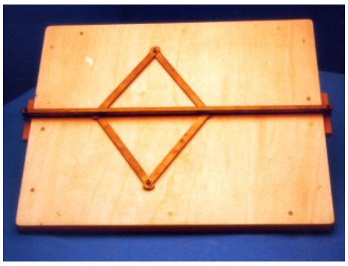
Il punto tracciatore e il punto direttore possono scorrere lungo due circonferenze o lungo due segmenti incisi nel piano d'appoggio in legno.

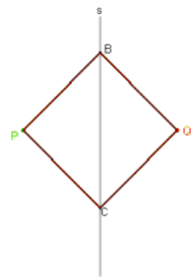
La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni di piano in cui il punto direttore e il punto tracciatore si corrispondono; tale corrispondenza è la traslazione individuata in modulo, direzione e verso dal lato AB fissato al piano.

Macchina per la realizzazione di una simmetria assiale

Sia r una retta di un piano. Si definisce **simmetria ortogonale di asse** r la trasformazione del piano che ad ogni suo punto P associa un punto P' tale che il segmento PP' sia perpendicolare all'asse r e che il punto medio M di PP' appartenga a tale asse.

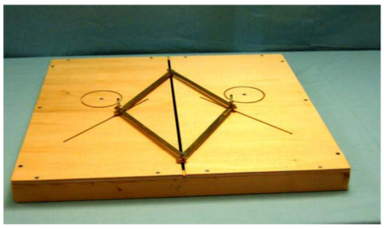
Modello originale





La macchina per la realizzazione di una simmetria assiale è formata da un rombo $PBQC$ articolato, di cui i due vertici opposti B e C sono vincolati a scorrere lungo una guida s. I due vertci P e Q hanno in tal modo due gradi di libertà. Essi sono rispettivamente il punto tracciatore e il punto direttore.

Modello adattato per non vedenti



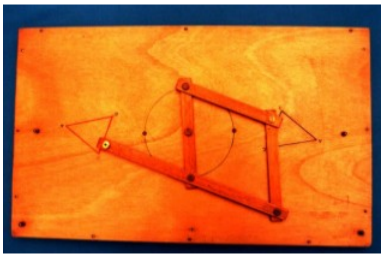
La guida è sostituita da una scalanatura nel legno. Il punto tracciatore e il punto direttore possono scorrere in due circonferenze o in due segmenti incisi nel legno.

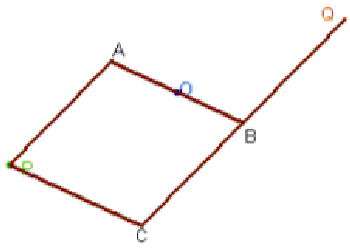
La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a s. Poiché in ogni posizione il segmento individuato dal punto direttore e dal punto tracciatore è una diagonale del rombo, quindi è perpendicolare all'altra diagonale ed è dimezzata da questa, la corrispondenza generata è la simmetria assiale ortogonale

Macchina per la realizzazione di una simmetria centrale

Si definisce **simmetria centrale** di centro C una trasformazione del piano che ad ogni suo punto P associa un punto P' tale che C sia il punto medio del segmento PP'.

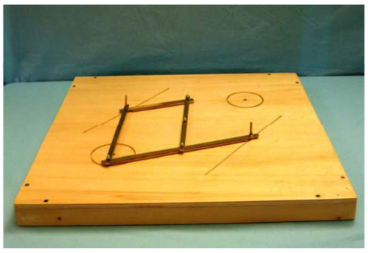
Modello originale





La macchina per la realizzazione di una simmetria centrale è formata da un rombo $ABCP$ articolato, il cui lato AB è imperniato al piano del modello nel suo punto medio O. L'asta CB è prolungata di una lunghezza $\overline{BQ} = \overline{CB}$. I punti P e Q hanno due gradi di libertà e sono rispettivamente il punto direttore e il punto tracciatore

Modello adattato per non vedenti



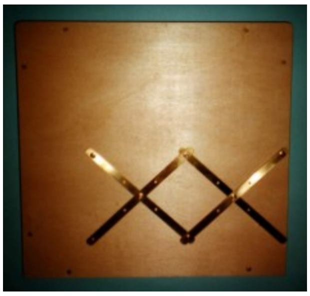
Ai disegni dei triangoli sono state sostituite due circonferenze e due segmenti incisi nel legno, in cui possono scorrere il punto P e il punto Q.

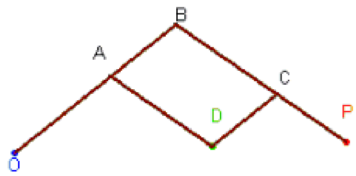
La macchina realizza una trasformazione in cui P e Q si corrispondono. Poiché in ognio posizione P e Q sono allineati con O e $\overline{PO} = \overline{OQ}$, la corrispondenza generata è la simmetria centrale con centro O.

Macchina per la realizzazione di una omotetia

Siano O un punto del piano e k un numero reale non nullo. Si definisce **omotetia** di centro O e rapporto k la trasformazione del piano che ad ogni suo punto P associa il punto P', allineato con O e P, tale che sia $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = k$

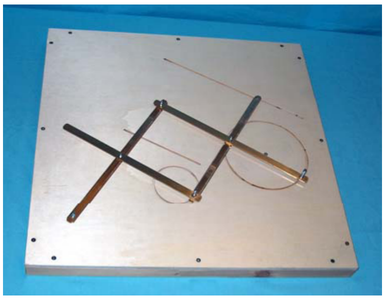
Modello originale





La macchina per la realizzazione di una omotetia, *pantografo di Scheiner*, è formata da quattro aste rigide incerniate nei punti A, B, C e D scelti in modo da formare una parallelogramma articolato. Il sistema è imperniato in O al piano del modello. Il punto P sull'asta BC è scelto in modo tale che sia $\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = k$ (k è la costante dell'omotetia).

Modello adattato per non vedenti

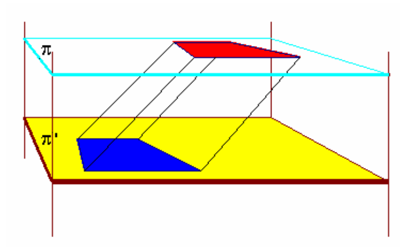


Nel modello sono state aggiunte le incisioni di due circonferenze e di due segmenti in cui possono scorrere il punto D e il punto P.

La macchina realizza una omotetia di centro O in cui i punti D e P si corrispondono e il rapporto di omotetia è $\frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = K$. Inoltre si ha una omotetia diretta ($k > 1$) se viene scelto D come punto direttore e P come punto tracciatore e un'omotetia inversa ($k < 1$) nel caso contrario.

Macchina per la genesi spaziale di una traslazione

Modello originale



La macchina per la genesi spaziale di una traslazione è costituita da due lastre rettangolari in plexiglas che rappresentano due piani paralleli π e π'. Il meccanismo permette di sovrapporre i due piani con un moto continuo, mantenendoli paralleli e enza ruotarli uno rispetto all'altro: durante tale movimento anche i fili tesi (raggi) conservano il loro parallelismo.

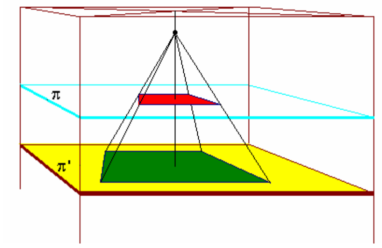
Modello adattato per non vedenti

I piani di plexiglas sono stati sostituiti con dei piani rigati che permettono l'esplorazione tattile. I fili mantenuti in tensione da pesi sono stati sostituiti da elastic, di diametro maggiore e che rimangono più tesi. Le figure disegnate sono state sostituite con figure rettangolari in legno.

l modello illustra una prospettività fra piani paralleli e π e π' generata per proiezione da un centro improprio. Il piano π può muoversi in direzione perpendicolare ai due piani fino a sovrapporsi a π'. Durante tale movimento (nel quale i singoli punti di π percorrono traiettorie rettilinee parallele) i raggi congiungenti punti corrispondenti si conservano paralleli, a sovrapposizione avvenuta la prospettività diventa una traslazione. Il quadrilatero appartenente al piano π' si puøimmaginare come ombra solare di quello appartenente al piano π.

Macchina per la genesi spaziale di una omotetia

Modello originale



La macchina per la genesi spaziale di una omotetia è costituita da due lastre rettangolari in plexiglas che rappresentano due piani paralleli π e π'. Il meccanismo permette di sovrapporre i due piani con un moto continuo, mantenendoli paralleli e conservando l'allineamento con O di ogni coppia P e P' di punti corrispondenti (quindi mentre i piani π e π' si avvicinano, anche O si avvicina ad essi.)

Modello adattato per non vedenti

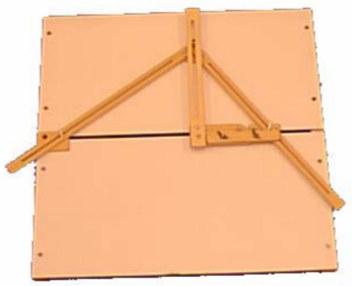
Come nel modello riadattato per la genesi spaziale di una traslaione, anche in questa macchina i piani di plexiglas sono stati sostituiti con dei piani quadrettati, i fili da elastici e le figure disegnate da figure rettangolari di legno.

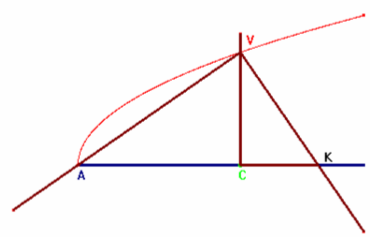
Il modello illustra una prospettività fra i piani paralleli π e π' ottenuta per proiezione da un centro proprio O. A sovrapposizione avvenuta il centro Ogiace sui due piani sovrapposti, il rapporto delle distanze di O da due punti corrispondenti è costante, quindi la trasformazione generata è una omotetia. La figura appartenente a π si può considerare come ombra di quella giacente su π, ottenuta per effetto di raggi luminosi (materializzati nel modello mediante fili tesi) provenienti da una sorgente puntiforme posta in O.

Parabolografo del Cavalieri

Si definisce **parabola** il luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto e da una retta del piano stesso.

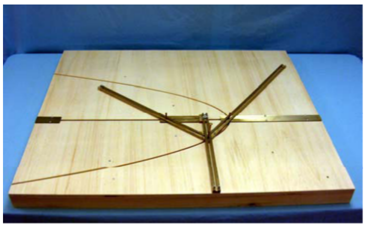
Modello originale





Il parabolografo del Cavalieri è costituito da una scanalatura rettilinea AK praticata in un piano π lungo la quale scorre un segmento CK di lunghezza k prestabilita. Al suo estremo C è vincolata rigidamente, in direzione perpendicolare a CK, una asta CV, giacente su π. Quando l'angolo retto $\widehat{KCV}$ si muove, trascina con sé l'angolo retto $\widehat{AVK}$, che ha i lati VA e VK costretti a passare, rispettivamente, per i punti A e K.

Modello adattato per non vedenti



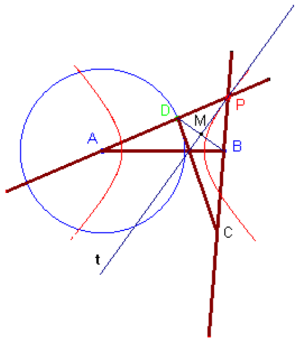
La parabola è incisa nel legno e il punto V scorre su di essa.

Durante il movimento, in ogni istante AVK è un triangolo rettangolo (variabile) di cui VC rappresenta l'altezza relativa alla ipotenusa e AK l'ipotenusa.Applicando ad esso il teorema di Euclide si ricava: $(\overline{VC} \cdot \overline{VC}) = (\overline{CK} \cdot \overline{CA}) = (k \cdot \overline{CA})$, proprietà caratteristica della parabola . Ponendo $\overline{CA} = x$ e $\overline{VC} = y$, si ottiene $y^2 = k \cdot x$.

Iperbolografo

Si definisce **iperbole** il luogo dei punti di un piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi del piano stesso detti fuochi.

Modello originale



L'iperbolografo è formato da un antiparallelogramma[1] articolato che ha uno dei lati maggiori AB fissato al piano mentre i lati minori sono prolungati in modo che, durante la deformazione, possano intersecarsi in un punto P.

Modello adattato per non vedenti

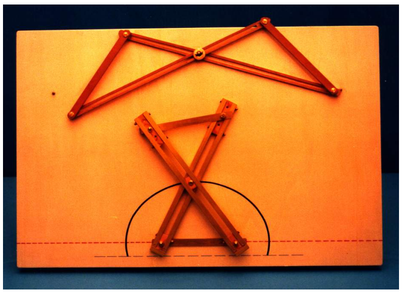
L'iperbole disegnata è sostituita con una incisa nel piano di legno.

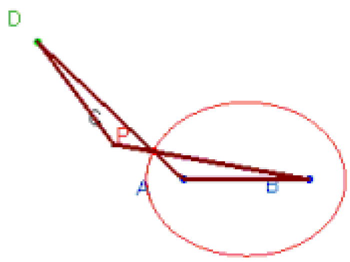
Durante il movimento dello strumento, il punto P descrive due archi simmetrici di una iperbole di fuochi i due punti fissi A e B. Infatti PD e PB sono congruenti, quindi risulta $\overline{PB} - \overline{PA} = \overline{PD} - \overline{PA} = \overline{AD} =$cost.

Ellissografo

Si definisce **elisse** il luogo dei punti di un piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi del piano stesso detti fuochi.

Modello originale





L'elissografo è costituito da un antiparallelogramma articolato $ABCD$ di cui uno dei due lati minori, AB, è fissato al piano del modello. Facendo ruotare l'asta AD, i punti C e D percorrono le circonferenze aventi centro, rispettivamente, in A e B. I lati AD e BC dell'antiparallelogramma, si incontrano in P.

Modello adattato per non vedenti

L'elisse disegnata è sostituita con una incisa nel piano di legno.

Poiché P è equidistante da B e D, risulta $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PD} = \overline{AD} = \text{k}$. Quindi P descrive una ellisse avente A e B come fuochi.

Bibliografia

[1] J.Locke, *An essay concerning human understanding*, (1694), Clarendon Press, Oxford, trad. it. *Saggio sull'intelletto umano*, a cura di N. Abbagnano,UTET, Torino 1971.

[2] G. Berkeley, *Essay towards a new theory of vision*, (1709), trad. it. *Saggio su una nuova teoria della visione*, 4 voll., Laterza, Bari 1972, vol II, IX, 8, pag.67.

[3] G.W. Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, (1705), trad. it. *Nuovi saggi sull'intelletto umano*,(1705), a cura di M. Mugnai e E. Pasini, 3 voll., UTET, Torino 2000, vol. II p.165.

[4] G. Berkeley, *The Theory of Vision or Visual Language shewing the immediate Presence and Providence of Deity. Vindicated and Explained*, (1733), J.Tonson, London.

[5] W. Cheselden, *An Account of some Observations Made by a Young Gentleman, who was Born Blind, or lost his Sight so early, that he had no Remembrance of ever having seen, and was couch'd between 13 and 14 years of Age*, (maggio-giugno 1728), in *"Philosophical Transactions of the Royal Society of London"*, vol. 35.

[6] Voltaire, *Eleménts de la philosophie de Newton*, (1740), in *Oeuvres complètes*, Alden Press, Oxford 1992.

[7] La Mattrie, *Historie naturelle de l'âme*, (1745), trad. it. *Storia naturale dell'anima.*

[8] E.B. de Condillac, *Essai sur l'origine des connaissances humaines*, (1746), trad.it. *Saggio sull'origine delle conoscenze umane*, in *Opere*, a cura di G. Viano, Torino, UTET, 1976

[9] D. Diderot, *La lettre sur les aveugles á l'usage de ceux qui voient*, (1749), trad. it. *Lettera sui ciechi per quelli che ci vedono*, a cura di M. Brini Savorelli, La nuova Italia, Firenze, 1999.

[10] E.B. de Condillac, *Traité des sensations*, (1754), ed. it. *Trattato sulle sensazioni* in *Opere*, a cura di G. Viano, UTET, Torino 1976.

[11] D.Russo *L'insegnamento della matematica ai ciechi*, (2001), *Tiflologia per l'integrazione, 11 (2).*

[12] I.Guerrieri Natoli, *La scuola e l'alunno non vedente*, (1998), Sovera, Roma.

[13] P. Zaniboni, *Il bambino non vedente: finalità e metodi della scuola dell'obbligo*, Monza, Biblioteca Italiana per i Ciechi "Regina Margherita".

[14] S.Fraiberg, *L'intervento precoce sui bambini ciechi e sulle loro famiglie*, (1989), Il Corriere dei ciechi.

[15] A.Montagu, *Il linguaggio della pelle*, (1981), Garzanti, Milano.

[16] E.Ceppi, *I minorati della vista*, (1981), Armando, Roma.

[17] G. Virga,*Considerazioni sperimentali sulla rappresentazione mentale dello spazio nei non vedenti*, Lavoro eseguito nell'ambito del Corso di Specializzazione Polivalente per le attività di sostegno - Area logico matematica (Corso svolto dal Prof. Filippo Spagnolo), (2000-2001).

[18] Jan Amos Komenský, *Opera Didactica Omnia*, (1657), ed. it. *La Grande Didattica*, a cura di A. Biggio, La nuova Italia, Firenze, 1993.

[19] A. Romagnoli, *Ragazzi ciechi*, (1924), Zanichelli.

[20] E. Ceppi, *Pedagogia, metodologia e didattica in Augusto Romagnoli.*

[21] J.E.F. Del Campo, *L' insegnamento della matematica ai ciechi* , (2000), Biblioteca Italiana per i Ciechi, Monza.

[22] P. Villey, *Le monde des aveugles, essai de psychologie.*, (1914), E. Flammarion, Paris.

[23] La scuola di Barbiana, *Lettera ad una professoressa*, (1966), LIBRERIA ed. fiorentine, Firenze.

[24] G. Abba, *Ruolo del materiale didattico nel processo di apprendimento e integrazione del non vedente in età evolutiva.*, (1995), *Tiflologia per l'integrazione, 5 (3).*

[25] Cfr E.Tioli Dallo spazio aptico alla rappresentazione immaginativo-motoria (p. 4-16) in Tiflologia dell'Integrazione 2006 nÂ°1

[26] E. Ceppi, Minoranze della vista e apprendimento, ed. M.E.D.E.A., Roma.

[27] E.Calligaris Bulligan, *I bambini ciechi nella scuola comune, piccolo manuale di tiflologia pratica per i genitori e per gli operatori scolastici e sociali*, Europrint Publications, Milano.

[28] S.Vangelisti, *Geometria tra le mani: macchine matematiche per non vedenti*, Facoltà di scienze della Formazione - Dipartimento di matematica 2006. (Tutor: M.G. Bartolini Bussi).

[29] M.G.Bartolini Bussi, M.Maschietto, Macchine matematiche: dalla storia alla scuola, (2006), Springer, Milano.

[30] M. Baldeschi, *Elementi di tiflopedagogia e tiflodidattica*,(2004), Boso.

[31] G. Abba, P. Bonanomi, E. Faretta, A. Soldati *Le problematiche dell'integrazione del non vedente nella scuola. Guida per insegnanti.*, (2001), Biblioteca Italiana per Ciechi, Monza.

[32] G. Abba, *Tiflodidattica e ausili: quale ruolo per l'integrazione.*, (2003), *Tiflologia per l'integrazione, 13 (4).*

[33] V. Franceschina, *Il bambino non vedente e la matematica: quali strumenti è opportuno utilizzare per facilitare questo apprendimento?*

[34] Consiglio internazionale per l'istruzione e l'educazione delle persone con disabilità visiva, Atti della conferenza europea sull'istruzione e l'educazione dei disabili visivi. Scambio di informazioni e di idee, Budapest,4 - 8 luglio 1995, Biblioteca Italiana per i Ciechi, 2000, XIV, 265 p.

[35] V. Cucinotta, *A scuola con l'alunno non vedente*, (1989), Edas, Messina.

[36] D. Galati, *Vedere con la mente: conoscenza, affettività, adattamento nei non vedenti*, (1996), Franco Angeli, Milano.

[37] A. Quatraro, *Immagini da toccare: proposte metodologiche per la realizzazione e fruizione di illustrazioni tattili*, (2004), Biblioteca Italiana per ciechi.

[38] , M. Mazzeo, Il bambino cieco. Introduzione allo sviluppo cognitivo, (1988), Anicia.

[39] M. Kennedy, Come disegnano i ciechi, (1997), Le Scienze.